

排他制約付きナップサック問題における上界の計算法およびその有効性

山崎 洋祐（指導教員：柳浦 睦憲）

名古屋大学 工学部

1. 前書き

排他制約付きナップサック問題についての研究を行った．排他制約付きナップサック問題とは，排他制約と容量制限を満たした上で選択したアイテムの価値の合計を最大化する問題である．この問題は，トラックによる配送計画などを考える際，混載できない荷物の組合せがあるときにどのように荷物を積載すれば良いかを考える場合などに応用することができる．

2. 問題の定義と定式化

入力として，容器の容量 c と，アイテム集合 $V = \{1, \dots, n\}$ の各アイテム $i \in V$ に対する重み w_i と価値 p_i ，および同時に選択できないアイテム対の集合 E が与えられる．出力はアイテムの部分集合 $S \subseteq V$ であり，その部分集合 S に含まれるどのアイテム同士もともに E に含まれてはならない．また，部分集合 S に含まれる各アイテムの重みの和は，容量を超えてはならない．この条件下で部分集合 S に含まれるアイテムの価値の和を最大にするのがこの問題の目的である．アイテムが解 S に含まれるならば 1，含まれないならば 0 の値をとる変数 x_i を用いて，問題を以下のように定式化することができる：

$$(P) \quad \text{maximize} \quad \sum_{j=1}^n p_j x_j, \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \quad (2)$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall (i, j) \in E. \quad (3)$$

3. 提案手法

アイテム集合 V を頂点集合，排他制約を表す集合 E を辺集合とするグラフを考える．頂点の部分集合で，任意の頂点間に辺が存在するものをクリークと呼ぶ．問題 (P) の任意の実行可能解 x は，任意のクリーク $C \subseteq V$ に対して $\sum_{i \in C} x_i \leq 1$ を満たすが，上界値計算において線形計画緩和問題を考える際に，式 (3) の一部をこのようなクリークに基づく制約に置き換えることにより上界の改善が期待できる．しかし，クリークの個数は指数オーダーになり得るため，全てを列挙するのは問題例が大規模な場合などに現実的でない．また，既存研究において問題 (P) の上界を計算する際に一般的に用いられてきた

線形計画緩和はその計算に時間がかかる．提案する手法は，特定の条件を満たすクリーク集合を生成することで，上界を計算する際に線形計画問題に対する汎用解法を必要としない計算法である．

提案手法では，以下の条件を満たすようにクリークを生成する．

1. どのアイテムも 1 つまたは 2 つのクリークに含まれる．

2. クリークの接続関係がサイクルを持たない．

以上の条件を満たすクリーク集合に対しては，線形計画緩和問題が持つ特別な構造をうまく利用することで双対問題を効率良く解くことができ，高速に上界を与えることができる．

4. 結果

上界の計算においては，線形計画緩和によって上界を計算するのが難しいようなサイズの問題例についても計算が可能となった．また，問題例によっては問題の線形計画緩和問題を解くよりも良い上界が得られた．この上界の計算法を分枝限定法に取り入れた結果，辺密度の高い問題例においては，既存のアルゴリズムよりも高速に最適解を求めることができた．

5. まとめ

排他制約付きナップサック問題に対して線形計画緩和問題に対する汎用解法を必要としない上界の計算法を提案した．計算実験の結果，提案手法が非常に大規模な問題例や，辺密度の高い問題例に対して有効であることを確認できた．また，提案した上界値計算法を分枝限定法に取り入れることにより，辺密度の高い問題例に対しての有用性を示すことができた．

参考文献

- (1) M. Hifi and M. Michrafy, "Reduction strategies and exact algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem," *Computers & Operation Research*, vol.34, pp.2657–2673, 2005
- (2) T. Yamada, S. Kataoka and K. Watanabe, "Heuristic and exact algorithms for disjunctively constrained knapsack problem," *IPSJ Journal*, Vol.43, pp.2864–2870, 2002